

**Soluție**

**1.a)**  $I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A.$

**b)**  $A^2 = -A$ ,  $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$ . Prin inducție matematică rezultă că  $A^n = (-1)^{n-1} A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci  $\{A^n | n \in \mathbb{N}^*\} = \{-A, A\}$ .

**c)**  $X^3 = A \Rightarrow \det(X^3) = \det(A) \Rightarrow \det(X) = 0$ . Dacă  $t = \text{tr}(X) \Rightarrow X^3 = t^2 X$ . Din  $t^2 X = A \Rightarrow t^3 = -1$ , deci  $t = -1$ .  
Deci  $X = A$ .

**2.a)**  $f(1) + f(-1) = a_n(1 + (-1)^n) + a_{n-1}(1 + (-1)^{n-1}) + \dots + a_1(1 + (-1)) + 2a_0$ .

Avem  $1 + (-1)^k \in \{0, 2\}$ , pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , deci  $f(1) + f(-1)$  este număr par

**b)** Presupunem că ecuația  $f(x) = 0$  are o rădăcină întreagă  $k$ ; atunci  $f(x) = (x - k)g(x)$ , unde  $g$  este un polinom cu coeficienți întregi.  $f(2) = (2 - k)g(2)$  este impar, deci  $2 - k$  este impar.

$f(3) = (3 - k)g(3)$  este impar, deci  $3 - k$  este impar. Atunci  $2 - k + 3 - k = 5 - 2k$  este par, contradicție.

**c)** Dacă polinomul  $g = X^3 - X + 3a + 1$  ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci  $g$  ar avea o rădăcină rațională  $x_0 = \frac{p}{q}$ ,

unde  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ , astfel încât  $p \mid 1$  și  $q \mid 1$ . Rezultă  $x_0 \in \{-1, 1\}$ .

Pentru  $x_0 = -1 \Rightarrow g(-1) = 3a + 1 = 0$  dacă și numai dacă  $a = -\frac{1}{3}$ , care nu este număr întreg, contradicție.

Pentru  $x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = 3a + 1 = 0$  dacă și numai dacă  $a = -\frac{1}{3}$ , care nu este număr întreg, contradicție.